

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama
Sidang Akademik 1993/94

Oktober/November 1993

ZMC 110/4 - Kalkulus dan Aljabar Linear

Masa : [3 jam]

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi ENAM muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab KESEMUA ENAM soalan.

Kesemuanya wajib dijawab di dalam Bahasa Malaysia.

1. (a) Selesaikan ketaksamaan-ketaksamaan yang berikut bagi semua nilai x :

$$(i) \frac{|x| - 1}{|x| - 2} \leq 0$$

$$(ii) |x-1| \leq 2|x+2|$$

(30/100)

- (b) Tentukan domain dan julat fungsi-fungsi yang berikut:

$$G(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 4}{x - 4}}$$

(15/100)

- (c) Anggap

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + \frac{1}{16} & , \quad x < \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} x^2 & , \quad x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Tentukan sama ada $f(x)$ boleh dibezakan di $x = \frac{1}{2}$.
Jika ya, cari nilai $f'(x)$ di situ.

(25/100)

..2/-

1. (d) Dengan menggunakan petua L'Hopital dapatkan had-had berikut:

$$(i) \lim_{x \rightarrow \pi^-} (x - \pi) \tan \frac{1}{2}x$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^3}{x}$$

(30/100)

2. (a) Dapatkan semua asimtot bagi

$$y = \frac{x^2 - 1}{x^3}$$

dan lakarkan grafnya.

(15/100)

(b) Jika $f(x) = \frac{x^3 - 2}{x}$

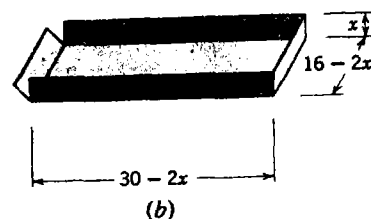
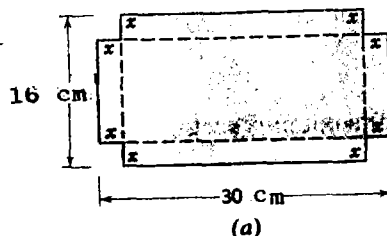
tentukan (i) sama ada $f(x)$ ganjil atau genap.

(ii) domain dan julat bagi $f(x)$.

(iii) semua ekstrema tempatan, titik lengkok-balas, kecengkungan dan asimtot. (Gunakan apa-apa ujian yang sesuai.) Kemudian lakarkan graf $f(x)$.

(55/100)

- (c) Satu kotak tak bertutup telah dibuat dari satu keping kad manila berukuran 16 cm lebar dan 30 cm panjang. Segiempat sama di setiap bucu kad telah dipotong dan dilipat sisinya. (Lihat rajah.) Apakah saiz segiempat sama tersebut supaya satu kotak yang mempunyai isipadu terbesar diperolehi?



3. (a) Dengan menggunakan teknik kamiran bahagian demi bahagian tunjukkan:

$$\int_{-1}^1 x f''(x) dx = f'(1) + f'(-1) + f(-1) - f(1)$$

(30/100)

- (b) Tentukan kamiran tak tentu, kamiran tentu dan kamiran tak wajar yang diberikan:

(i) $\int \sqrt{\tan x} \sec^4 x dx$

(ii) $\int \frac{x}{x^2 - 4x + 8} dx$

(iii) $\int \frac{x^2}{3x^3 - x^2 + 3x - 1} dx$

(iv) $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{(2x-1)^3}$

(v) $\int \frac{(\ln x^2)^2}{x} dx$

Gunakan apa-apa teknik kamiran yang sesuai.

(70/100)

4. (a) Tunjukkan bahawa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Kemudian dengan menggunakan ujian perbandingan had dan keputusan di atas tentukan sama ada siri

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left[1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]}{2^n}$$

menumpu atau mencapah.

(40/100)

4. (b) Gunakan ujian nisbah atau ujian punca untuk menentukan sama ada siri-siri di bawah menumpu atau mencapah. Gunakan ujian lain jika perlu.

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

$$(ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{10^n (2n+1)^n}$$

(30/100)

- (c) Bagi siri-siri berselang yang diberikan, tentukan sama ada tiap-tiapnya menumpu secara mutlak, bersyarat atau mencapah. Bagi siri (i) gunakan ujian siri berselang. Apa-apa ujian boleh digunakan bagi siri (ii).

$$(i) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k+3}{k(k+1)}$$

$$(ii) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{3^k}{k^2}$$

(30/100)

5. (a) Tunjukkan

$$\frac{d}{dx} |\sin x| = \begin{cases} -\cos x & , \quad x < 0 \\ 1 & , \quad x = 0 \\ \cos x & , \quad x > 0 \end{cases}$$

(20/100)

- (b) Cari pembezaan bagi yang berikut:

$$(i) f(x) = [x + \csc(x^3 + 3)]^{-3}$$

$$(ii) f(x) = \ln(\ln x^x)$$

$$(iii) y = \sqrt{1 + \sin^3(xy^2)}$$

$$(iv) f(x) = \sqrt{x} \sqrt[3]{x^2 + x + 1}$$

(50/100)

5. (c) Suhu T di (x,y,z) merupakan suatu fungsi $f(x,y,z)$. Jika koordinat x dan y meningkat mengikut masa dengan kadar 4 m/s dan koordinat z pula menurun mengikut masa dengan kadar 3 m/s, maka cari dT/dt di tahap di mana

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 4, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 7 \quad \text{dan} \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 9$$

(30/100)

6. (a) Bagi setiap matrik yang diberi tentukan sama ada matrik tersebut bentuk baris ecelon sahaja atau baris ecelon terturun.

$$(i) \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(ii) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(iii) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(iv) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(v) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Bagi setiap matrik yang berbentuk baris ecelon, dengan menggunakan operasi baris asas turunkan ke bentuk baris ecelon terturun.

(20/100)

- (b) Diberi

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -a \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & a \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- (i) Cari nilai a jika B adalah matrik songsangan bagi A .
- (ii) Cari $(BAB)^{-1}$, A^{-2} dan $(10A)^{-2}$.
- (iii) Dapatkan matrik $(A+B)^t$ dan $(5ABA)^t$.
- (iv) Hitungkan nilai $\det(2A + 3B)^t$.

(50/100)

6. (c) Selesaikan sistem persamaan yang berikut dengan menggunakan petua Cramer.

$$\begin{aligned}4x + 5y &= 2 \\11x + y + 2z &= 3 \\x + 5y + 2z &= 1\end{aligned}$$

(30/100)

- ooo0ooo -